Ολική διαφορική γεωμετρία 08/05/2018

Κανονική περιοχή: Καλούμε κανονική περιοχή σημείου $p\in S$, ένα ανοικτό $U\subset S$, $p\in U$ και

$$U = \exp_p(V), \quad V\subset T_pS \quad \text{με:}$$

$\exp_p|_U : U \to V$ διαφορομορφισμός.

Κανονικές συντεταγμένες: Θεωρώ ορθοκανονική (δεξιόστροφη) βάση $\{e_1, e_2\}$ στο T_pS και αντίστοιχο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων.

$w\in T_pS$, $w = ue_1 + ve_2$.

Ορίζω το σύστημα κανονικών συντεταγμένων

$$X : \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : ue_1+ve_2 \in U\subset T_pS\} \to S$$

δηλαδή:

$X(u,v) = \exp_p(ue_1+ve_2)$ ένα σύστημα συντεταγμένων, διότι η $\exp_p : U\subset T_pS \to S$ είναι διαφορομορφισμός.

$X_u(0,0) = dX\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(0,0)}\right)$ = διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης $u\mapsto \exp_p(ue_1)$ στο $u=0$

$u\mapsto \exp_p(ue_1) = \gamma(1; p, ue_1) = \gamma(u; p, e_1)$

Άρα $X_u(0,0) = e_1$, $X_v(0,0) = e_2$

$\longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow$

Άρα $E(p) = E(0,0) = \|x_u(0,0)\|^2 = \|e_1\|^2 \Rightarrow E(p) = 1$

$F(0,0) = \langle x_u(0,0), x_v(0,0) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0$

$G(0,0) = \|x_v(0,0)\|^2 = \|e_2\|^2 \Rightarrow G(p) = 1$

▶ Συμπερασματικά, η γεωμετρία της επιφάνειας είναι αυτή του επιπέδου

ΣΥΣΤΗΜΑ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΩΝ ΠΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.

Εισάγω πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) στο T_pS με πόλο το $O \in T_pS$ και πολικό άξονα:

$$O\ell \parallel e_1, \quad \rho > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$u = \rho\cos\theta, \quad v = \rho\sin\theta$$

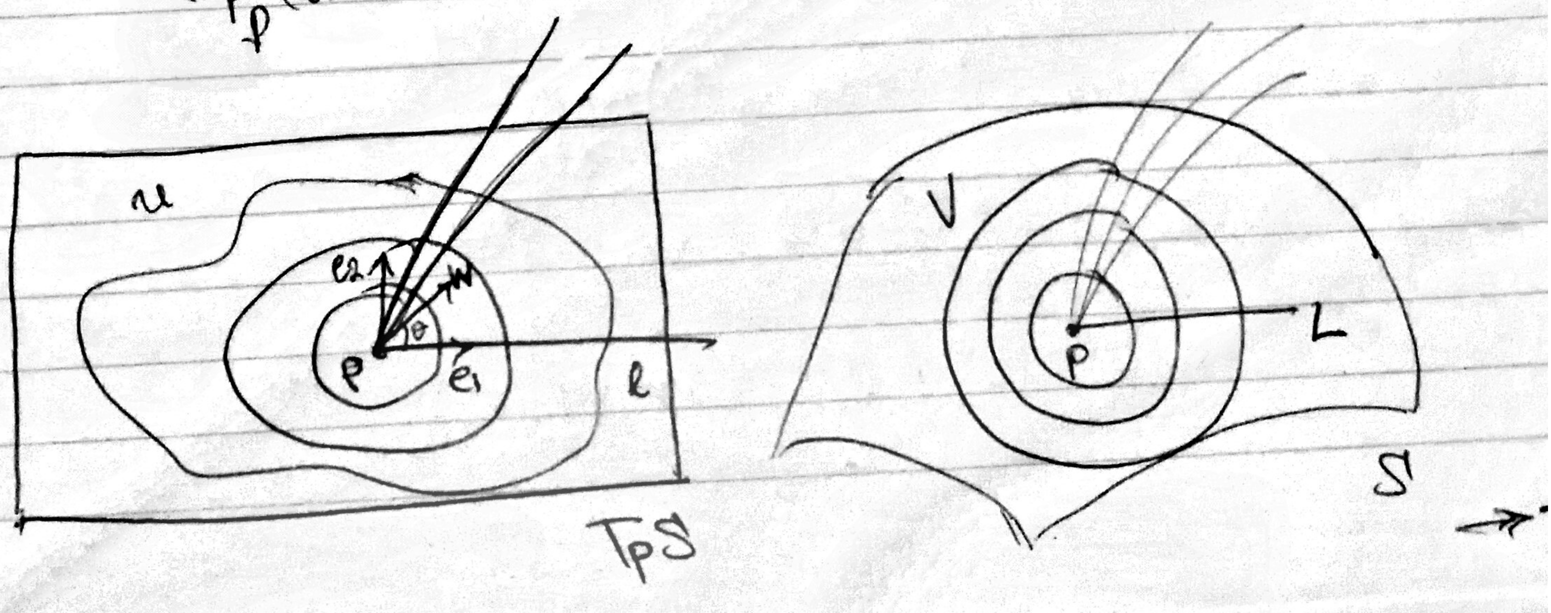
Ορίζω το σύστημα γεωδαισιακών πολικών συντεταγμένων:

$$X(\rho, \theta) = \exp_p(\rho\cos\theta\, e_1 + \rho\sin\theta\, e_2)$$

$$X : U \setminus \ell \to V \setminus L$$

$\exp_p : U \subset T_pS \to V$ ~~διαφορομορφισμός~~

$$\exp_p(\ell) = L$$



ε,

$$\exp_p(tw) = \gamma(1; p, tw) = \gamma(t; p, w)$$

- Οι ακτινικές γεωδαισιακές δια του p έχουν παραμετρικές της μορφής $X(r, \theta = \sigma\tau\alpha\theta)$

- Οι εικόνες κύκλων στο T_pS' με κέντρο το $O \in T_pS$ αντιστοιχούν σε κλειστές σε κλειστές καμπύλες της S', οι οποίες καλούνται γεωδαισιακοί κύκλοι και έχουν παραμετρικές παραστάσεις $X(r = \sigma\tau\alpha\theta, \theta)$

Πρόταση: Τα θεμελιώδη ποσά $E(p,\theta)$, $F(p,\theta)$, $G(p,\theta)$, $p>0$, $0<\theta<2\pi$ ως προς το σύστημα γεωδαισιακών πολικών συντεταγμένων είναι:

$$E(p,\theta) = 1 \quad , F(p,\theta) = 0$$

$$\lim_{p\to 0} (\sqrt{G})(p,\theta) = 0 \quad , \quad \lim_{p\to 0} (\sqrt{G})_p(p,\theta) = 1$$

απόδειξη: $E = \|X_p\|^2$

$$X(p, \theta = \theta_0) = \exp_p(p(\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2)) = \gamma(1; p, p(\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2))$$

$$= \gamma(p; p, \underbrace{\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2}_{\text{μοναδιαίο}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|X_p\| = 1 \Rightarrow \boxed{E = 1}$$

$$F = \langle X_p, X_\theta \rangle$$

Γνωρίζω ότι η $X(p(t), \theta(t))$ είναι γεωδαισιακή

άρα

$$(\Sigma) \begin{cases} p'' + \Gamma^1_{11}(p')^2 + 2\Gamma^1_{12}\cancel{p'\theta'} + \Gamma^1_{22}(\theta')^2 = 0 \\ \theta'' + \Gamma^2_{11}(p')^2 + 2\Gamma^2_{12}\cancel{p'\theta'} + \Gamma^2_{22}(\theta')^2 = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \longrightarrow$

και $\rho(t)=t$, $\theta(t)=\theta_0=$ σταθ. είναι λύση του (Σ)

Άρα $\Gamma_{11}^1=0=\Gamma_{11}^2$

$X_{\rho\rho}=\Gamma_{11}^1 X_\rho+\Gamma_{11}^2 X_\theta+eN$

$$\Rightarrow \begin{cases} E\Gamma_{11}^1+F\Gamma_{11}^2=\langle X_{\rho\rho},X_\rho\rangle \\ F\Gamma_{11}^1+G\Gamma_{11}^2=\langle X_{\rho\rho},X_\theta\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=\frac{1}{2}\langle X_\rho,X_\rho\rangle_\rho \\ 0=\langle X_{\rho\rho},X_\theta\rangle=\langle X_\rho,X_\theta\rangle_\rho-\langle X_{\rho\theta},X\rangle \end{cases}$$

Άρα $F_\rho=0$, δηλ. $F(\rho,\theta)$ ανεξ. του ρ

$$F(\rho,\theta)=\lim_{\rho\to 0}F(\rho,\theta)=0$$

$\boxed{\text{Λήμμα Gauss} \rightsquigarrow F(\rho,\theta)=0}$

$\bar{u}=\rho\cos\theta$ $\quad$ E,F,G: ως προς γεωδ. πολικές

$\bar{v}=\rho\sin\theta$ $\quad$ |||

$\bar{E},\bar{F},\bar{G}$: ως προς κανονικές συντεταγμένες $(\bar{u},\bar{v})$

$\bar{E}(p)=\bar{G}(p)=1$, $\bar{F}(p)=0$

$\{X_\rho,X_\theta\}$, $\{X_{\bar{u}},X_{\bar{v}}\}$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}=P^t\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix}\cdot P$$

πίνακας μετάβασης από την μία βάση στην άλλη

$$EG-F^2=(\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2)(\det P)^2$$

$$\begin{cases} X_\rho=\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\rho}X_{\bar{u}}+\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\rho}X_{\bar{v}}=\cos\theta X_{\bar{u}}+\sin\theta X_{\bar{v}} \\ X_\theta=\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}X_{\bar{u}}+\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}X_{\bar{v}}=-\rho\sin\theta X_{\bar{u}}+\rho\cos\theta X_{\bar{v}} \end{cases}$$

$$\det P = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$\underset{F=0}{\overset{E=1}{\Longrightarrow}} G = (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)\rho^2 \to \sqrt{G} = \rho\sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \Rightarrow \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G}) = 0$$

$$(\sqrt{G})_\rho = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} + \rho(\dots) \Rightarrow$$

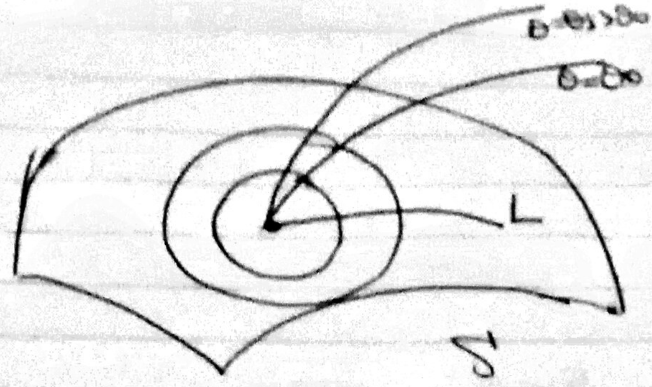
$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = \lim_{\rho\to 0}(\dots) = 1 \quad \blacksquare$$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

Το έξοχο θεώρημα ως προς τις γεωδαισιακές πολικές συντεταγμένες λαμβάνει την μορφή

$$\boxed{K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}} \quad (*) \quad \left(\Leftrightarrow (\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0 \right)$$

Εφαρμογή: Έστω S κανονική επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K<0$



Θεωρώ $L(\rho)$ = το μήκος της γεωδ. κύκλων ακτίνας ρ να περικλείεται μεταξύ των ακτινικών γεωδαισιακών $\theta=\theta_0$ και $\theta=\theta_1$

$$L(\rho)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\|x_\theta(\rho,\theta)\|d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{G}(\rho,\theta)\,d\theta$$

$$L'(\rho)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta)d\theta$$

K>0 έξοχο θεώρημα

$$L''(\rho)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}(\sqrt{G})_{\rho\rho}(\rho,\theta)\,d\theta>0.$$

$\Rightarrow L'(\rho)\nearrow$ δηλ. αν $\rho>\rho_0\Rightarrow \boxed{L'(\rho)>L'(\rho_0)}$ (1)

$$\lim_{\rho\to0}L'(\rho)=\lim_{\rho\to0}\int_{\theta_0}^{\theta_1}(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta)\,d\theta=$$

$$=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\lim_{\rho\to0}(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta)d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1}1\,d\theta=\theta_1-\theta_0>0.\Rightarrow$$

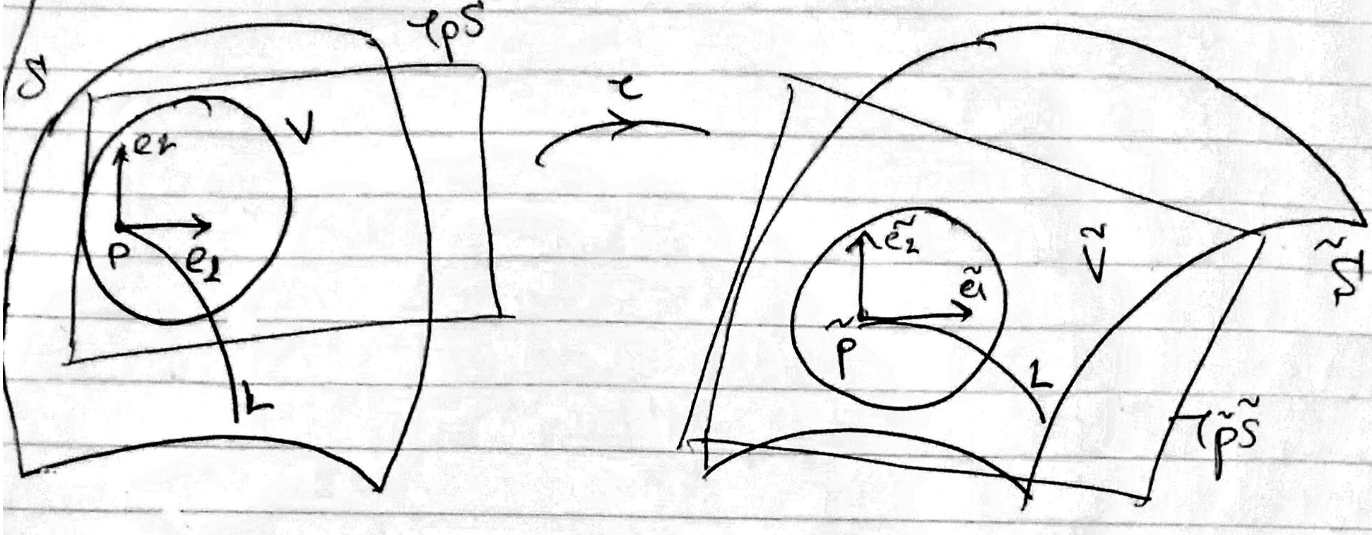
$\Rightarrow \boxed{\lim_{\rho_0\to0}L'(\rho_0)=\theta_1-\theta_2}$ (2) $\rightarrow$

$\textcircled{2} \Rightarrow \lim_{p_0 \to 0} L'(p) \geq \lim_{p_0 \to 0} L'(p_0) \Leftrightarrow L'(p) \geq \theta_1 - \theta_0 > 0 \Rightarrow L(p) \uparrow$

<u>Θεώρημα</u> (Minding): Επιφάνειες με την ίδια, αλλά σταθερή, καμπυλότητα Gauss, είναι τοπικά ισομετρικές. Για την ακρίβεια ισχύει το αντίθετο.

Έστω $S, \tilde{S}$ επιφάνειες με την ίδια σταθερή καμπυλότητα Gauss K. Για τυχόντα σημεία, $p \in S$, $\tilde{p} \in \tilde{S}$, ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, e_2\}$, $\{\tilde{e_1}, \tilde{e_2}\}$ των T_pS, $T_{\tilde{p}}\tilde{S}$ και ισομετρία

$\tau : T_pS \to T_{\tilde{p}}\tilde{S}$ με $\tau(e_1) = \tilde{e_1}$
$\tau(e_2) = \tilde{e_2}$



Τότε ∃ περιοχή V του $p \in S$ και περιοχή $\tilde{V}$ του $\tilde{p} \in \tilde{S}$ και ισομετρία $\phi : V \to \tilde{V}$ τ.ω. $\phi(p) = \tilde{p}$ και $d\phi_p = \tau$.

<u>Απόδειξη</u>: Μέσω των βάσεων $\{e_1, e_2\}$, $\{\tilde{e_1}, \tilde{e_2}\}$ εισάγω σύστημα αντεταγμένων γεωδαισιακών πολικών με κοινές παραμέτρους ρ, θ

$x(\rho, \theta)$, $\tilde{x}(\rho, \theta)$, $\tilde{E} = 1$, $\tilde{F} = 0$, $\lim_{\rho \to 0} (\sqrt{\tilde{G}}) = 0 \wedge \lim_{\rho \to 0} (\sqrt{\tilde{G}})_\rho = 1$

$\rightarrow \quad K = -\dfrac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}} \leftrightarrow (\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0 \; (*)$

$(\sqrt{\tilde{G}})_{\rho\rho} + K\sqrt{\tilde{G}} = 0 \; (\tilde{*})$

(1η περίπτωση) $(*) \leftrightarrow (\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0 \Rightarrow (\sqrt{G})_{\rho}(\rho,\theta) = A(\theta) \rightarrow$

$\xrightarrow{\rho\to 0} A(\theta) = 1$

$(\tilde{*}) \leftrightarrow (\sqrt{\tilde{G}})_{\rho\rho} = 0 \Rightarrow (\sqrt{\tilde{G}})_{\rho}(\rho,\theta) = \tilde{A}(\theta) \xrightarrow{\rho\to 0} \tilde{A}(\theta) = 1$

- $(\sqrt{G})_{\rho}(\rho,\theta) = 1 \leftrightarrow (\sqrt{G})(\rho,\theta) = \rho + B(\theta) \xrightarrow{\rho\to 0} 0 = B(\theta) \rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{G(\rho,\theta) = \rho^2}$

- $(\sqrt{\tilde{G}})_{\rho}(\rho,\theta) = 1 \leftrightarrow (\sqrt{\tilde{G}})(\rho,\theta) = \rho + \tilde{B}(\theta) \xrightarrow{\rho\to 0} \tilde{B}(\theta) = 0 \rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{G}(\rho,\theta) = \rho^2}$

Ίδια πρώτα θεμελιώδη ποσά και το αποτέλ. L είναι μηδενικού μέτρου άρα δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα

(2η περίπτωση) $(*) \Leftrightarrow (\sqrt{G})(\rho,\theta) = A(\theta)\cos(\sqrt{K}\rho) + B(\theta)\sin(\sqrt{K}\rho) \xrightarrow{\rho\to 0} A(\theta) = 0$

$(\tilde{*}) \Leftrightarrow (\sqrt{\tilde{G}})(\rho,\theta) = \tilde{A}(\theta)\cos(\sqrt{K}\rho) + \tilde{B}(\theta)\sin(\sqrt{K}\rho) \xrightarrow{\rho\to 0} \tilde{A}(\theta) = 0$

$(\sqrt{G})_{\rho} = B(\theta)\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}\rho) \xrightarrow{\rho\to 0} 1 = \sqrt{K}\,B(\theta)$

$(\sqrt{\tilde{G}})_{\rho} = \tilde{B}(\theta)\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}\rho) \xrightarrow{\rho\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{K}} = \tilde{B}(\theta)$

$\longrightarrow$

Άρα $G(\rho,\theta)=\frac{1}{k}\sin^2(\sqrt{k}\rho)$, $\tilde{G}(\rho,\theta)=\frac{1}{\tilde{k}}\sin^2(\sqrt{\tilde{k}}\,\rho)$

(S^n = περίπτωση) όμοια

$\phi=\tilde{x}\circ x^{-1}$, $(\exp_p)_0=Id$

$\tilde{x}=\widetilde{\exp}_{\tilde{p}}$, $x=\exp_p$, $\phi=\widetilde{\exp}_{\tilde{p}}\circ\tau\circ\exp_p^{-1}$